



TITLE:

仕事のわりふりにおける区分法の比較(待ち行列理論とその周辺)

AUTHOR(S):

牧野, 都治

CITATION:

牧野, 都治. 仕事のわりふりにおける区分法の比較(待ち行列理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 519: 266-284

ISSUE DATE:

1984-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98420>

RIGHT:

仕事のわりふりにおける区分法の比較

東京理科大(理工) 牧野都治 (Toji Makino)

1. まえがき

われわれはさきに, 文献[1]において, 仕事のわりふりについて考察した。その問題は, 早くおわる仕事を窓口A, 時間のかかる仕事を窓口Bでサービスする場合, どのように振りわけたらよいかを調べたものである。ただし, 受注した仕事は何分のサービスを要するものであるかは, 受注時において, すでにわかっている。つまり, 仕事の本来のサービス分布が, 図1-(1)のようであるとき, それを2つの窓口A, Bにわける問題である。

これを, [1]では次のように考えた。

はじめに, 仕事の累積受注件数百分率を横軸, 累積サービス時間百分率を縦軸にとり, 100%を1と目盛ることにして, 図2のようなパレート図を書く。つぎに, パレート図の縦軸 $1/2$ に対応する横軸の目盛り α_0 を読み, そ

の点で区別すればよい，ということも提案した。

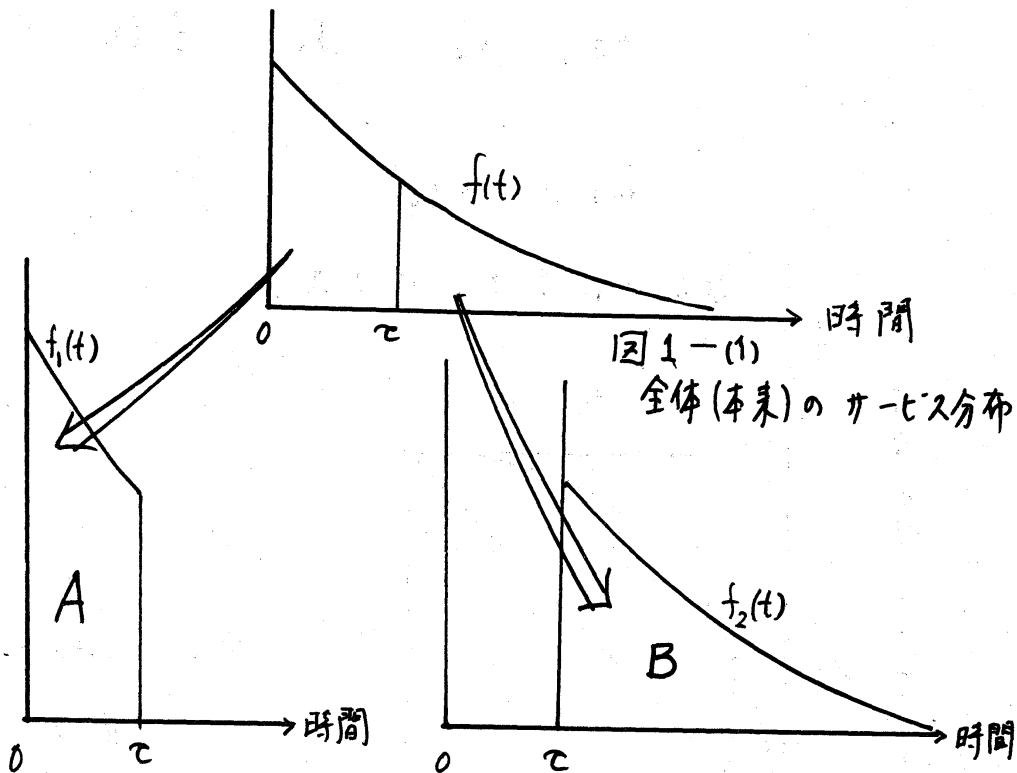


図 1-1

全体(本来)のサービス分布

図 1-2

窓口 A のサービス分布

図 1-3

窓口 B のサービス分布

記号

λ = 仕事の到着率, μ = 本来のサービス率

$f(t)$ = サービス分布の確率密度関数

窓口 A:

λ_1 = 窓口 A への到着率, μ_1 = 窓口 A のサービス率

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ = 窓口 A の利用率,

L_1 = 窓口 A の系平均人数,

L_{q1} = 窓口 A の列平均人数.

$f_1(t)$ = 窓口 A の
サービス時間の
確率密度関数

窓口 B :

上の添字の 1 を 2 に変えて,

$\lambda_2, \mu_2, \rho_2, f_2(+),$

L_2, L_{q_2}

などと表すことにする。

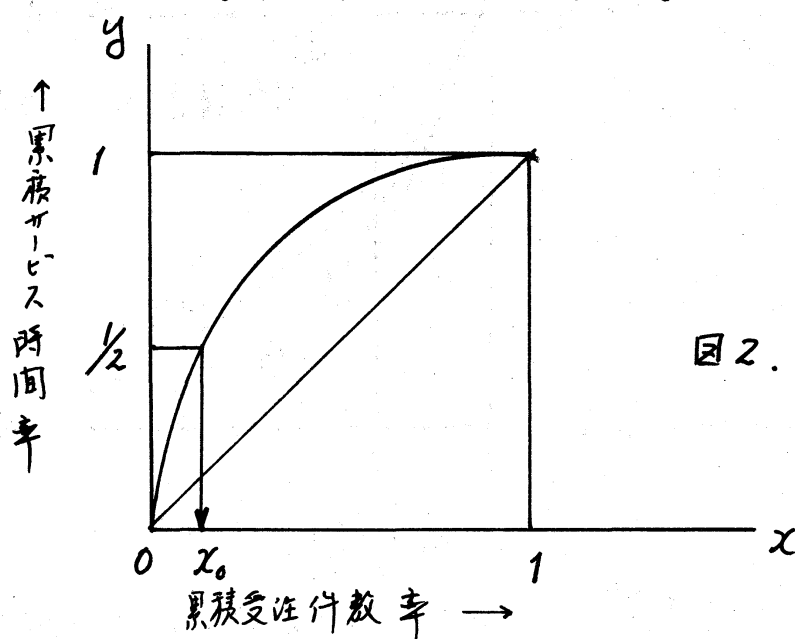


図2. ハーレー図による
区分の仕方.

上のような x_0 で区分するということは, 2つの窓口の利用率 ρ_1, ρ_2 を等しくすることに代わるもの ([1] 参照) ののであるが, それでは2つの窓口の系平均人数を等しくしたり, それらの和を最小にしたりするには, どのように区分したらよいのか。このことについて, ポアソン到着・ガンマサービスの系ではどうなるかを調べたのが, 文献 [3] である。ただしこの場合, サービス時間 T の確率密度関数として, E_n

分布のそれぞれ

$$f(t) = \frac{(k\mu)^k e^{-k\mu t}}{\Gamma(k)} \cdot t^{k-1} \quad (t > 0) \quad \dots (1)$$

を用いてゐるが、 k (>0) は整数値に限定してゐないので、アーラン分布とよばずガンマ分布とよんでゐる。

今圖は、サービス分布がパレート分布；

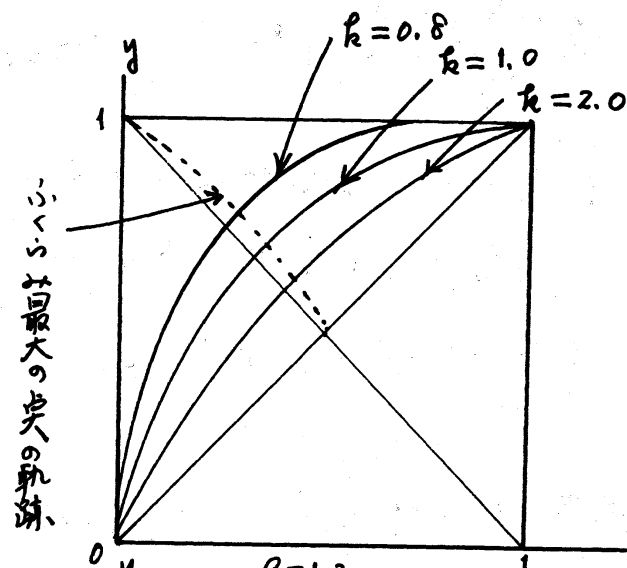
$$\text{確率密度関数 } f(t) = \left(\frac{a}{t}\right)^{a+1} \quad (a > 1, t > a) \quad \dots (2)$$

の場合と、対数正規分布；

$$\text{確率密度関数 } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\log t - m)^2}{2\sigma^2}} \quad (t > 0) \quad \dots (3)$$

a 場合とを取りあげて、この分布がどうなるかを調べてみた。
これらの分布に注目する理由は、パレート図におけるふくらみ最大の点にきかだつた特徴がみられるからである。すなわち、前圖とりあげたガンマ分布は、図3-11)のように、ふくらみ最大の点の軌跡が対角線 $x+y=1$ (今後、単に対角線といへば、こちらをさすものとする) の右上にくるのに対し、パレート分布では図3-12)のように、対角線の左下にくる。また、対数正規分布のパレート曲線は、対角線に関し

て対称な曲線であって、ふくらみ最大の点も対角線とにくる。



(文献[5], [6]参照)

図3-1)

ガンマ分布の
パレート図

(1)式に対応; μ の
値に無関係

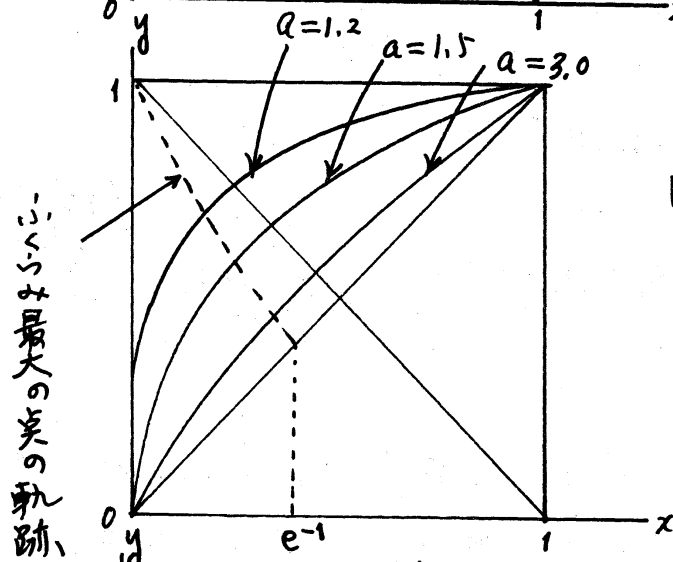


図3-2)

パレート分布の
パレート図

(2)式に対応)

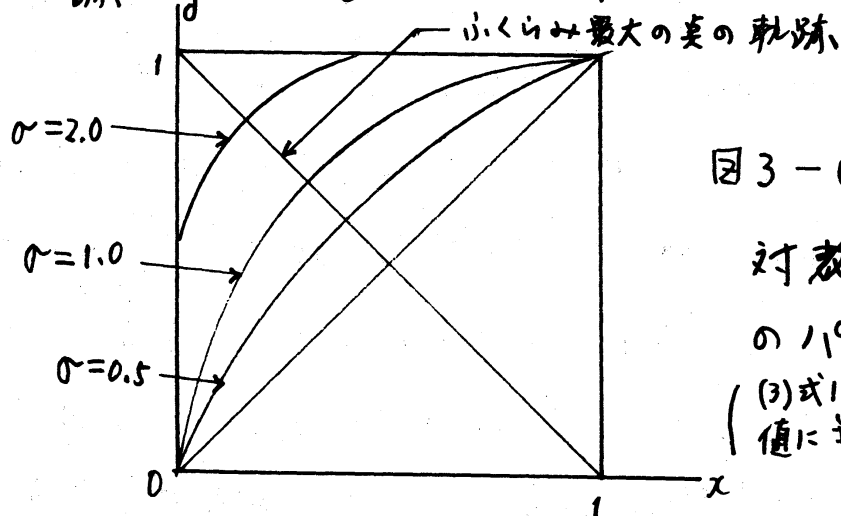


図3-3)

対称正規分布
のパレート図

(3)式に対応; m の
値に無関係

2. ガンマサービスの場合

仕事の到着がポアソン分布，サービス時間が E_k 分布（p.d.f. が (1) 式で表される；ただし， k は整数値に限定しない）にしたがうとき，区分表をどのように定めたらよいかについては，前回報告済み（[3] 参照）であるが，パレートサービスや対数正規サービスの場合との比較に便利のように，ここに再録しておく。すなわち，表 1 が，ガンマサービスに対するものであって，

表 1-(1)； 2 つの窓口の列平均人数の和 L_g を最小にするような，分布での区分表 μ_c の値。

(注. μ_c は，分布での区分表 c を，平均サービス時間 $1/\mu$ を単位にしてはかった値.)

表 1-(2)； 2 つの窓口の列平均人数 L_{g_1} ， L_{g_2} が等しくなるようにふりわけると，分布での区分表 μ_c の値。

表 1-(3)； 2 つの窓口での系平均人数 L_1 ， L_2 が等しくなるようにふりわけると，分布での区分表 μ_c の値。

表 1-(4)； 分布での区分表 μ_c に対応する，パレート図での区分表（横座標） α の値。

3. パレートサービスの場合

仕事の到着がポアソン分布，サービス時間がパレート分布にしたがうとき，区分点をどうしたらよいかを計算して，表2を得た。ただし，ガンマサービスの場合のそれらと比較するために，パレート分布（p.d.f. が(2)式で表される）の1次モーメント，2次モーメントが，ガンマ分布のそれと同じになるように，パラメータを

$$\alpha = 1 + \sqrt{k+1}$$

とあいた。

このようにして，表1に対応する表2が得られてゐる。すなわち，

表2-(1)； 2つの窓口の列平均人数の和 L_g を最小にするような，分布での区分点 μ の値。

表2-(2)； $L_{g_1} = L_{g_2}$ にする μ の値

表2-(3)； $L_1 = L_2$ にする μ の値

表2-(4)； 分布の区分点 μ に対応するパレート関数の区分点 α の値。

4. 対数正規サービスの場合

仕事の到着がポアソン分布，サービス時間が対数正規分布（p. d. f. が(3)式で表される）にしたがうとき，区分支をどうしたらよいかを計算して，表3を得た。ただし，パレートサービスの場合と同じように，これをガンマサービスのときの区分支と比較しやすくするために，1次モーメント，2次モーメントをそろえることにした。そのために，対数正規分布のパラメータ m, σ に関して

$$e^{\sigma^2} = 1 + \frac{1}{k^2}, \quad e^m = \left(\mu \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \right)^{-1}$$

が成り立つものとした。

このようにして，表1に対応する表3が得られた。すなわち，

表3-1) : 2つの窓口の列平均人数の和 L_g を最小にするような，分布での区分支 $\mu\tau$ の値。

表3-2) : $L_{g1} = L_{g2}$ にする $\mu\tau$ の値。

表3-3) : 分布の区分支 $\mu\tau$ に対応するパレート図での区分支 λ の値。

対数正規サービスの場合は,

$$L_{g_1} = L_{g_2}$$

にするような区分点は

$$L_1 = L_2$$

にするような区分点と一致する。とばかりでなく, 対数正規サービスの場合には, 上のような区分のし方が, 実は

$$S_1 = S_2$$

とするような区分法とも一致していることを示すことができる。

5. 各種の区分法の比較

表1 ~ 表3 をくらべてみる。

ポアソン到着・ガンマサービスの系における仕事のわりゆりに関しては, 次の様相がうかがわれる。 L_g を最小にしたり, $L_{g_1} = L_{g_2}$ になるように分けける区分点について, S の値の増加とともに, μ の値が増加することかわかるが, $L_1 = L_2$ になるような区分のし方においては, S の値の増加とともに μ の値は減少する。

(← 表1-(1) ~ 表1-(4))

これに対し, ポアソン到着・パレートサービスの系については, 上と全く逆の様相を呈する。すなわち, L_g を最小

にしたり, $L_{g_1} = L_{g_2}$ にしたりする区分点については, ρ の増加とともに, μ の値が減少。しかし, $L_1 = L_2$ にする μ の値は, ρ の値の増加にともなって増加する。

(← 表 2-11 ~ 表 2-14)。

一方, ポアソン到着・対称正規サービスの系においては, L_g を最小にする区分点について, ρ の増加とともに μ が増大する。しかし, $L_{g_1} = L_{g_2}$ にしたり $L_1 = L_2$ にする区分点は, ρ の値に無関係である。

以上, 客の到着がいずれもポアソン分布にしたかう場合だけもとらあげたが, より一般の到着分布に対してはどうか。また, もっと複雑な系についてはどうなるか。これらは, 今後の課題としたい。

なお, 本稿を算するにあたり, 計算 (とくに数表の作成) の大部分を, (元) 東京理科大学大学院生 中野勝博 君に手伝っていただいた。ここに記して謝意を表したいと思う。

[文 献]

[1] 牧野都治 (1976),

待ち行列タイプの問題に対するパレート分析,
統計数理研究所彙報, 23, 129-134.

- [2] 牧野都治 (1979),

分布の特性の表現に対するパレート図の利用について, 統計数理研究所彙報, 26, 1-9.

- [3] 今上 (1982),

待ち行列とパレート分析, 京都大学数理解析研究所講義録, 452, 107-124.

- [4] 今上 (1982),

待ち行列論におけるアーラン分布とワイブル分布, 応用統計学, Vol. 11, No. 3, 153-158.

- [5] 今上 (1984),

格差・パレート図・ABC分析,
日本評論社, 140-154.

- [6] 牧野都治, 中野勝博 (1982),

仕事のわりふり問題における分布の影響について, 日本OR学会1982年秋季研究発表会予稿集.

表1. ガンマカーブスの場合

表1-(1) 2つの窓口の列平均人数

 L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小にする μ の値.

ρ g	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	3.59492	3.86201	4.18734	4.57842	5.03556
0.3	2.25820	2.34826	2.44762	2.55553	2.67038
0.5	1.86940	1.91874	1.97114	2.02601	2.08250
0.8	1.60586	1.63261	1.66018	1.68824	1.71638
1.0	1.50674	1.52635	1.54630	1.56637	1.58627
1.5	1.36206	1.37285	1.38361	1.39422	1.40456
2.0	1.28278	1.28966	1.29307	1.30306	1.30943
2.5	1.23238	1.23718	1.24186	1.24639	1.25072

注. ① g は サービス分布 (E_g 分布) の パラ

メータ.

② μ は, 分布での区分点 μ を, 平均サービス時間 $1/\mu$ を単位にしている値.

表 1-(2) $L_{g_1} = L_{g_2}$ にする $\mu\tau$ の値

$h \backslash \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	4.06715	4.73688	4.88965	5.07221	5.29390
0.3	2.56726	2.60080	2.63922	2.68366	2.73564
0.5	2.03415	2.05051	2.06910	2.09039	2.11502
0.8	1.69365	1.70167	1.71073	1.72103	1.73286
1.0	1.57070	1.57631	1.58264	1.58982	1.59805
1.5	1.39693	1.39919	1.40200	1.40664	1.41078
2.0	1.30492	1.30666	1.30816	1.31081	1.31331
2.5	1.24775	1.24892	1.25022	1.25170	1.25338

表 1-(3) $L_1 = L_2$ にする $\mu\tau$ の値

$h \backslash \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	7.26501	6.49188	6.06845	5.84718	5.78000
0.3	3.20562	3.07630	2.98380	2.92320	2.89216
0.5	2.33571	2.28372	2.44315	2.21424	2.19749
0.8	1.83769	1.81587	1.79781	1.78413	1.77553
1.0	1.67050	1.65616	1.64403	1.63463	1.62853
1.5	1.44695	1.44032	1.43454	1.42991	1.42677
2.0	1.33502	1.33122	1.32784	1.32508	1.32401
2.5	1.26787	1.26540	1.26319	1.26137	1.26008

表1-(4) 分布の区分度 $\mu\tau$ に

対応する ハート図での区分度

 χ の値

k	L_3 最小			$L_{g_1} = L_{g_2}$			$L_1 = L_2$		
	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9
0.1	$\mu\tau$	3.59	5.04	$\mu\tau$	4.07	5.29	$\mu\tau$	7.27	5.78
	χ	0.079	0.058	χ	0.064	0.055	χ	0.038	0.050
0.3	$\mu\tau$	2.26	2.67	$\mu\tau$	2.57	2.74	$\mu\tau$	3.21	2.89
	χ	0.138	0.114	χ	0.119	0.111	χ	0.089	0.103
0.5	$\mu\tau$	1.87	2.08	$\mu\tau$	2.03	2.12	$\mu\tau$	2.34	2.20
	χ	0.171	0.149	χ	0.154	0.145	χ	0.126	0.138
0.8	$\mu\tau$	1.61	1.72	$\mu\tau$	1.69	1.73	$\mu\tau$	1.84	1.78
	χ	0.204	0.187	χ	0.190	0.183	χ	0.167	0.178
1.0	$\mu\tau$	1.51	1.59	$\mu\tau$	1.57	1.60	$\mu\tau$	1.67	1.63
	χ	0.221	0.204	χ	0.208	0.202	χ	0.188	0.198
1.5	$\mu\tau$	1.36	1.40	$\mu\tau$	1.40	1.41	$\mu\tau$	1.45	1.43
	χ	0.253	0.241	χ	0.241	0.238	χ	0.226	0.235
2.0	$\mu\tau$	1.28	1.31	$\mu\tau$	1.30	1.31	$\mu\tau$	1.34	1.32
	χ	0.275	0.264	χ	0.264	0.264	χ	0.252	0.260
2.5	$\mu\tau$	1.23	1.25	$\mu\tau$	1.25	1.25	$\mu\tau$	1.27	1.26
	χ	0.292	0.283	χ	0.283	0.283	χ	0.274	0.278

表 2. パレートサービスの場合

表 2-11) 2つの窓口の列平均人数

L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小
にする μ の値

ρ k	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	2.95885	2.65216	2.32874	2.00722	1.71712
0.3	1.78589	1.65647	1.52743	1.41045	1.30450
0.5	1.46594	1.38649	1.31056	1.24043	1.17775
0.8	1.26348	1.21544	1.17029	1.12881	1.09152
1.0	1.19233	1.15515	1.12037	1.08846	1.05968
1.5	1.09599	1.07322	1.05204	1.03260	1.01497
2.0	1.04849	1.03268	1.01800	1.00451	0.99224
2.5	1.02104	1.00923	0.99826	0.98817	0.97897

(注) パレート分布の1次モーメント, 2次モーメントが, E_k 分布(表1)のそれと等しくなるように調整してある。

表 2-(2) $L_{g_1} = L_{g_2}$ にする $\mu\tau$ の値

$h \backslash \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	1.93033	1.85589	1.77414	1.68405	1.58471
0.3	1.38583	1.35704	1.32546	1.29072	1.25329
0.5	1.22619	1.20899	1.19009	1.16924	1.14616
0.8	1.12036	1.11011	1.09882	1.08632	1.07243
1.0	1.08192	1.07402	1.06529	1.05563	1.04486
1.5	1.02856	1.02373	1.01839	1.01245	1.00582
2.0	1.00168	0.99833	0.99461	0.99048	0.98585
2.5	0.98604	0.98353	0.98075	0.97765	0.97417

表 2-(3) $L_1 = L_2$ にする $\mu\tau$ の値

$h \backslash \rho$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	1.09595	1.24948	1.35088	1.40877	1.42461
0.3	1.01226	1.07012	1.11477	1.14536	1.16063
0.5	0.98845	1.02237	1.05008	1.07034	1.08188
0.8	0.97125	0.99110	1.00799	1.02086	1.02900
1.0	0.96445	0.97964	0.99276	1.00303	1.00960
1.5	0.95444	0.96357	0.97165	0.97816	0.98253
2.0	0.94925	0.95553	0.96115	0.96573	0.96893
2.5	0.94635	0.95101	0.95523	0.95871	0.96115

表2-(4) 分布の区分類 $\mu\tau$ に対応する 10^4 レート図での区分類 χ の値

k	L_3 最小			$L_{31} = L_{32}$			$L_1 = L_2$		
	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9	ρ	0.1	0.9
0.1	$\mu\tau$	2.96	1.72	$\mu\tau$	1.93	1.58	$\mu\tau$	1.10	1.42
	χ	0.027	0.083	χ	0.066	0.099	χ	0.223	0.124
0.3	$\mu\tau$	1.79	1.30	$\mu\tau$	1.39	1.25	$\mu\tau$	1.01	1.16
	χ	0.075	0.148	χ	0.129	0.161	χ	0.253	0.189
0.5	$\mu\tau$	1.47	1.18	$\mu\tau$	1.23	1.15	$\mu\tau$	0.99	1.08
	χ	0.113	0.183	χ	0.168	0.194	χ	0.273	0.223
0.8	$\mu\tau$	1.26	1.09	$\mu\tau$	1.12	1.07	$\mu\tau$	0.97	1.03
	χ	0.157	0.221	χ	0.208	0.232	χ	0.291	0.253
1.0	$\mu\tau$	1.19	1.06	$\mu\tau$	1.08	1.04	$\mu\tau$	0.96	1.01
	χ	0.180	0.239	χ	0.227	0.244	χ	0.300	0.268
1.5	$\mu\tau$	1.10	1.01	$\mu\tau$	1.03	1.01	$\mu\tau$	0.95	0.98
	χ	0.223	0.275	χ	0.263	0.275	χ	0.319	0.297
2.0	$\mu\tau$	1.05	0.99	$\mu\tau$	1.00	0.99	$\mu\tau$	0.95	0.97
	χ	0.253	0.296	χ	0.286	0.296	χ	0.332	0.313
2.5	$\mu\tau$	1.02	0.98	$\mu\tau$	0.99	0.97	$\mu\tau$	0.95	0.96
	χ	0.275	0.310	χ	0.305	0.319	χ	0.342	0.329

表3. 対数正規サージスの場合

表3-① 2つの窓口の列平均人数 L_{g_1} , L_{g_2} の和 L_g を最小にする $\mu\tau$ の値

g h	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	3.38882	3.54465	3.71903	3.91972	4.16720
0.3	2.11897	2.19569	2.27521	2.35804	2.44649
0.5	1.75877	1.81223	1.86532	1.91760	1.96908
0.8	1.51925	1.55677	1.59247	1.62576	1.65602
1.0	1.43056	1.46201	1.49135	1.51799	1.54127
1.5	1.30299	1.32550	1.34578	1.36335	1.37769
2.0	1.23425	1.25185	1.26732	1.28031	1.29036
2.5	1.19111	1.20557	1.21806	1.22830	1.23594

注. 対数正規分布の1次モーメント, 2次モーメント
が, E_h 分布 (表1) のそれと等しくなるように調整してある。

表3-② L_{g_1} , L_{g_2} に対する $\mu\tau$ の値

h	0.1	0.3	0.5	0.8
$\mu\tau$	3.31662	2.08167	1.73205	1.50000

h	1.0	1.5	2.0	2.5
$\mu\tau$	1.41421	1.29099	1.22474	1.18322

表3-(3) 分布の区分度 μ_T に
対応するパレート図での区分度
 χ の値

k	Lg 最小			Lg ₁ = Lg ₂		L ₁ = L ₂
	ρ	0.1	0.9	ρの値に無関係		左の Lg ₁ Lg ₂ における値 と同じ
0.1	μ _T	3.39	4.17	μ _T	3.32	
	α	0.059	0.044	α	0.061	
0.3	μ _T	2.12	2.45	μ _T	2.08	
	α	0.110	0.089	α	0.113	
0.5	μ _T	1.76	1.97	μ _T	1.73	
	α	0.144	0.121	α	0.148	
0.8	μ _T	1.52	1.66	μ _T	1.50	
	α	0.180	0.156	α	0.184	
1.0	μ _T	1.43	1.54	μ _T	1.41	
	α	0.199	0.175	α	0.204	
1.5	μ _T	1.30	1.38	μ _T	1.29	
	α	0.234	0.210	α	0.238	
2.0	μ _T	1.23	1.29	μ _T	1.22	
	α	0.260	0.236	α	0.264	
2.5	μ _T	1.19	1.24	μ _T	1.18	
	α	0.278	0.254	α	0.283	